

A 48. ORTVAY RUDOLF

FIZIKAI PROBLÉMAMEGOLDÓ VERSENY FELADATAI

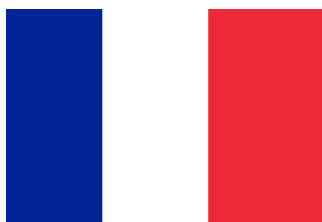
2017. október 27 — november 6.

1. A francia forradalom után a természettudományos eredményeket széles körben alkalmazták és népszerűsítették.

Ez még az új francia zászló, a trikolor megtervezésekor is szempont volt. Lafayette két különböző változatát is megtervezte a zászlónak, amelyek csak a három színre jutó területek arányában különböznek.

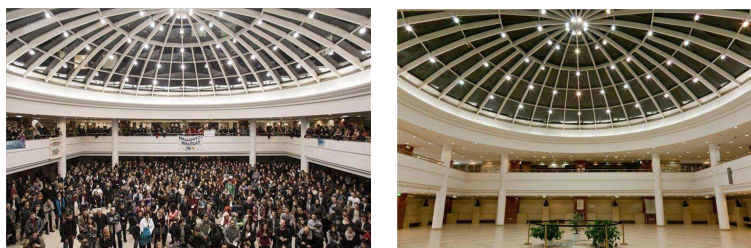
Egyik változatban a kék-fehér-vörös arány azonos, a másikban 30:33:37. Az ország hivatalos zászlója különböző időszakokban egyik vagy másik volt, bár a haditengerészet mindig az utóbbit részesítette előnyben.

Adjunk kvalitatív magyarázatot az egyenlőtlen beosztás alkalmazásának előnyeire! Vizsgáljuk meg a kérdést kvantitatíven is!



(Gombkötő Ákos)

2. Az ELTE lágymányosi épületének Gömbaulája messze földön híres visszhangjáról.



Ha a terem közepe táján beszélünk, meglepően erősen halljuk a visszhangot. Ha pedig tapsolunk, periodikusan ismétlődve halkuló visszhangokat hallunk. Naívvul azt gondolnánk, hogy az ismétlődés periódusa azonos azzal az idővel, ami alatt a hang a padló és a mennyezet közti oda-vissza utat megteszi. Azonban a terem $h \approx 10,8$ m magassága és a $344,7$ m/s hangsebesség alapján erre kb. $0,063$ s értéket kapunk, ami nyilván túl gyakori ismétlődés. Mérés nélkül is megállapítható, hogy másodpercenként 4–5 körüli az ismétlődések száma. Miért van ez így, és pontosan mennyit kapunk a periódusidőre? A számításhoz jó tudni, hogy az aula mennyezete gömbfelület, melynek sugara $R \approx 15,2$ m, azaz a gömbfelület a padlóig folytatva se adna ki egy félgömböt. A terem alapja persze sík. *Tanács:* vizsgáljuk először a függőleges szimmetriatengely közelében haladó hanghullámokat!

(Kaufmann Zoltán)

3. A kisfiammal baktattunk a csömöri busz-végállomás felé, miközben esett az eső. Egy hosszú lejtőn haladva azt láttuk, hogy a víz nem egyenletesen folyik, hanem nagyjából egyenlő időközönként hullámok alakulnak ki, amik viszonylag gyorsan gördülnek le az aszfalton.

A hegy felől „korlátlan” volt a víz utánpótlása, így mi nem láttuk a hullámok kialakulását, csak az eredményt észleltük. Egészen fantasztikus volt a jelenség szabályossága.

Miért alakulnak ki a hullámok? Milyen sebességgel haladnak? Mennyi időnként követik egymást?

(Tichy-Rács Éva észlelése alapján Tichy-Rács Ádám)

4. A statisztika nagyon sokszor használja pénzérme feldobását a sztochasztikus folyamatok szemléltetésére. Kétségtelen hogy minden részletével együtt ez egy igazán bonyolult folyamat, de bizonyos egyszerűsítő feltételek mellett – vákuumkamrában, jól definiált paraméterekkel történő gépi dobás – mégis bizonyos mértékig előrejelezhető a végeredmény.

Vizsgáljunk egy, a padló magasságából függőlegesen feldobott vékony, kicsiny sugarú érmét ($r \gg z$)!

Az érme a feldobás pillanatában vízszintes, síkmenti irányban helyezkedik el, megegyezéssel alapon a fej van felül. Az érme a talajról nem pattan el, közegellenállás nincs, az r sugar elhanyagolhatóan kicsi az érme tömegközépponti mozgásához tartozó trajektória jellemző hosszához képest.

A dobás paramétereinek (sebesség, szögsebesség) függvényében írjuk fel, hogy mikor lesz a dobás eredménye fej, és mikor írás! Fogalmazzuk meg kvalitatíven a véletlenszerűség feltételeit!

Adjunk meg felső becslést a $|P_{fej} - 1/2|$ értékére vonatkozóan!

Hozzávetőlegesen mekkora ez az érték egy valóságos pénzfeldobó-automatára?

(Gombkötő Ákos)

5. Karácsony közeledtével itt-ott már megjelentek a fénylő díszgömbök. Ahol néhány ilyen gömb egymás közelében található, ott többszörösen tükröződnek egymáson, és a tükörképekben sok-sok fénypontként megjelenik a távolabbi lámpák szintén többszöri visszaverődést szenvedett fénye is. Vizsgáljuk az egyszerűség kedvéért azt az esetet, amikor két r sugarú gömböt helyezünk egymástól d távolságra, a középpontjukat összekötő egyenesre merőleges irányból világítjuk meg őket, és onnan is szemléljük! A lámpa és a megfigyelő is legyen olyan messze, hogy a lámpa fénye párhuzamos nyalábként kezelhető. Hol lesznek a tükröződésbeli fénypontok, azaz mely fénysugarak verődnek vissza a megvilágítással ellentétes irányba $n = 1, 2, 3, \dots$ visszaverődést követően? Van-e olyan fénysugár, amely elvileg a végtelenségig pattog a két gömb között? Aszimptotikusan milyen sorozatot alkotnak a pontok az $n \rightarrow \infty$ határesetben, és kiszámolható-e analitikusan az aszimptotikus sorozat egyik paramétere? Ha numerikus számításra van szükség, vizsgáljuk a $d = 2r$ esetet!

(Kaufmann Zoltán)

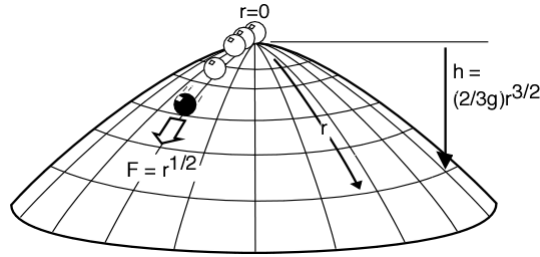
6. Adjunk meg olyan centrális $V(r)$ potenciálokat, melyekben adott R rádiuszhoz tartozó pontból ugyanakkora sebességgel, de különböző irányokban elindított tömegpontok a következő különböző pályákat futhatják be:

a) Minden pálya ugyanabba a pontba, és pedig a kiindulópontnak a centrumra való tükrözésével kapott pontba érkezik.

b) Minden pálya a centrumtól újból R távolságra érve egymással párhuzamos egyenesek mentén távozik a végtelenbe. (A két esetre két különböző potenciál adandó meg, indokolással együtt, s mindegyikben meghatározandó, milyen energia ill. kezdősebesség irányok mellett valósulnak meg a fenti pályák.)

(Györgyi Géza és Vigh Máté)

7. Vizsgáljuk meg a következő, ú.n. Norton-kupolán történő mozgást.



Itt az r paraméter a csúcstól mért ívhossz. A csúcstól nem túl távol egy pontszerű test mozgásegyenlete $\ddot{r} = \sqrt{r}$. Vezessük le ezt a mozgásegyenletet, és írjuk fel az általános megoldást akkor, ha a $t = 0$ pillanatban a test a csúcson nyugalomban áll!

Filozófusok számos cikket írtak erről a rendszerről. Fejtsük ki mi lehet ennek az oka! Mutassunk rá legalább két különféle úton, hogy milyen módon is érvénytelenedik a modell, mint a valóság leképezése!

Mutassuk meg, hogy egy ezzel ekvivalens rendszer minden különösebb kuriózum nélkül megoldható!

Vizsgáljuk meg a Norton-kúpola kvantumos változatát is, ahol a hullámfüggvény a felülethez kötött! Írjuk fel a nulla impulzusmomentummal és épp akkora energiával rendelkező energiasajátállapotot, ami klasszikusan éppen elegendő volna a csúcson nyugváshoz!

(Gombkötő Ákos)

8. Határozzuk meg az N egyforma golyóból álló, egyforma rugókkal összekötött, a két végén szabad lineáris lánc harmonikus rezgéseinek sajátfrekvenciáit!

(Tichy Géza)

9. Egy R sugarú gömbnek mind az északi, mind a déli féltékeje homogén tömegeloszlású, de a tömegük különböző, $M_2 \neq M_1$. a) Mekkora munka árán lehet egy m tömegű pontszerű testet az északi pólusról a déli pólusra vinni? b) Számítsuk ki a munkát a gömbfelület két tetszőleges pontja között! Csak a gömb gravitációs térét vegyük számításba!

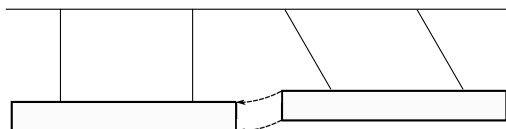
(Cserti József)

10. A „gömböc” elnevezés a homogén, konvex, egyetlen stabil és egyetlen instabil egyensúlyi helyzettel rendelkező testeket jelöli. (Magyar matematikusok „Gömböc” nevű találmánya nyomán.)

A gömböcöt egy síkra helyezük. Mit mondhatunk a stabil egyensúlyi helyzete körüli, kis kitéréssel történő, tisztán gördülő rezgés frekvenciájáról? Adjunk alsó és felső korlátot rá!

(Gombkötő Ákos)

11. Kemény anyagok Young-modulusának mérésére a következő módszert találták ki. Két egyforma rudat függesztünk fel vízszintesen ingaként. Az egyik rudat kitérítjük, majd elengedjük. Ezután a két rúd összeütközik, majd a másik tér ki. Egy elektromos órával mérjük azt az időt, amíg a két rúd érintkezik. Az érintkezés T idejéből és a rudak L hosszából, keresztmetszetéből, valamint tömegéből határozzuk meg a Young-moduluszt!



(Tichy Géza)

12. Egy rögzítettnek tekintett csillag körül bolygó kering a nagytengelyű, ε excentricitású ellipszispályán. Térjünk át a csillaghoz rögzített inerciarendszerről egy másikra, amely az ellipszispálya középpontjától a csillag irányába mozog állandó $v = c\varepsilon$ sebességgel, ahol c a fény sebessége. Milyen pályán mozog a bolygó az új koordináta-rendszerből nézve? Adjunk meg és ábrázoljuk a pályamenti pozíciót jellemző koordinátát az új rendszeridő függvényében (vagy fordítva)!
Tanács: a pálya paraméterezéséhez használjuk a csillagászok által kedvelt „excentrikus anomália” nevű mennyiséget!

(Dávid Gyula)

13. A klasszikus mechanikán belül a konzervatív rendszereket tipikusan reverzibilisnek tekintjük. Ugyanakkor ismert, hogy például az ideális gáz – amely a klasszikus mechanika keretein belül modellezhető mindenfajta disszipáció nélkül –, látszólag irreverzibilisen viselkedik.

Tekintsünk egy hasonló rendszert!

Legyen egy kiválasztott harmonikus oszcillátorunk, amely N darab oszcillátorból álló környezethez van lineárisan csatolva. A sajátfrekvenciák tisztán valósak tetszőlegesen nagy N esetén. Jelöljük a kiválasztott oszcillátor kitérését X -el, a környezetet alkotó rezgési módusokat pedig jellemezzük x_i -vel, ahol az index megszámlálható N esetén az adott módot jelöli. Meg nem számlálható N esetén x_i természetesen kitérés-sűrűség értelmű mennyiség.

A kontinuum-számosságú N módus esete speciális, gyenge csatolás esetén egyszerű megoldás is megadható. A Lagrange-függvény ekkor felírható mint

$$L = \frac{m_0}{2}(\dot{X}^2 - \omega_0^2 X^2) + \int_0^\infty \frac{\rho(\omega)}{2}(\dot{x}_i^2 - \omega^2 x_i^2)d\omega - X \int_0^\infty C_i x_i d\omega,$$

ahol a környezet széles frekvenciatartományba eső oszcillátorokból áll, $\rho(\omega)$ a tömeggel súlyozott állapotossűrűség, $C(\omega) \ll \rho(\omega)\omega^2$ pedig az oszcillátor-környezet csatolási állandójával súlyozott állapotossűrűség. Mit mondhatunk a sajátfrekvenciákról?

Határozza meg az X időfüggését, és a rá vonatkozó effektív differenciálegyenletet a fenti rendszerben!

Az irodalomban fellelhető definíciók alapján jellemezze a rendszert! Eleget tesz-e a konzervatív rendszerek definíciójának? Eleget tesz-e a disszipatív rendszerek definíciójának?

(Gombkötő Ákos)

14. 190 éve halt meg Ernst Chladni (https://en.wikipedia.org/wiki/Ernst_Chladni), aki csodálatos mintázatokat tudott varázsolni egy homokkal beszórt lemezre egy hegedűvonóval. Vajon egy előre megadott tetszőleges rajzolatot is elő lehet állítani egy megrezgetett lemezen? Ha igen próbáljuk meg pl. CHLADNI nevét kirajzoltatni egy szimulációban (vagy akár kísérleti megvalósításban)! A lemezt modellezhetjük ideális membránnal, fix vagy szabad peremfeltételekkel. Ha nem csak a csomópontokat figyeljük, hanem egy időpontban a teljes amplitúdó értékeket, akár szürkeárnyalatos képet, pl. Chladni arcképét is ki lehet rajzoltatni? Ha tetszőleges kép nem rajzolható ki, indokoljuk a limitációkat!

(Csabai István)

15. Vékony, kis r sugarú kapilláris csövet helyezünk függőlegesen egy nagyon kis viszkozitású folyadék felületére úgy, hogy éppen létrejöjjön az érintkezés.

A viszkozításra teljesül, hogy $\eta \ll g\rho^{3/2}r^{5/2}\gamma^{-1/2}$, ahol g a nehézségi gyorsulás, ρ a folyadék sűrűsége, r a cső belső sugara, γ a felületi feszültség.

A folyadékot nedvesítőnek feltételezhetjük, a meniszkusz magasságát lényegében azonosíthatjuk a folyadékoszlop magasságával.

Határozzuk meg a meniszkusz magasságát jellemző egydimenziós dinamikát! Mekkora lesz a folyadékoszlop maximális magasságának és egyensúlyi magasságának aránya?

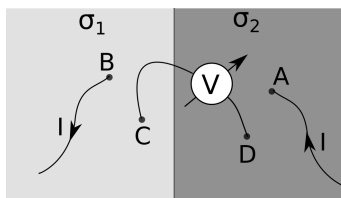
(Gombkötő Ákos)

16. Egy szabályos tetraéder csúcsaiban egyforma pontszerű töltések vannak rögzítve. A tetraéder középpontjában egy kicsiny, de véges tömegű töltött test van, ami egy egyenes mentén súrlódásmentesen mozoghat.

Ha a középső testet kicsiny A távolsággal kitérítjük és elengedjük, a kialakuló rezgés periódusideje $T(A)$ lesz. Mekkora lesz a kétszeres kitérítéshez tartozó $T(2A)$ periódusidő?

(Gnädig Péter)

17. Egy elhanyagolható vastagságú végtelen kiterjedésű fémlapot két σ_1 és σ_2 vezetőképességű félsík tökéletes összeillesztésével kaptunk meg. Határozzuk meg a rendszer tetszőleges négy pontja (A, B, C, D) között a négyesenállás értékét: $R_{AB,CD} = \frac{V_{CD}}{I_{AB}}$, ahol V_{CD} a C és D pontok között mért feszültségkülönbség, I_{AB} pedig az A ponton befolyó, illetve a B ponton kimenő áram értéke!



(Cserti József és Széchenyi Gábor)

18. A szív bal kamrájában a vérnyomás közelítően periodikusan ingadozik. Ugyanakkor, bár a szívizmok működése periodikus, a vérellátásnak gyakorlatilag folyamatosnak kell lennie. Modellezzük a véráramlást egy sorba kötött szív–aorta–ér rendszerrel! Az aorta egy rugalmas kamrának vehető, az erek R hidrodinamikai ellenállásúak. Számítsuk ki az erek végén megjelenő térfogati áram időfüggését, ha a szívből $I(t) = I_0 \sin^2 \omega t$ áram jön ki! (*Tanács*: legyünk kritikusak a szakirodalommal szemben!)

(Gombkötő Ákos)

19. Az iskolában azt tanultuk, hogy a csokinyuszinak először a füle olvad el a melegben, mert kiáll a testből. Egy egyszerűsített esetben numerikus modellezéssel ellenőrizzük, hogy igaz-e ez! Vegyünk egy r sugarú és h hosszúságú hengert, amely -10°C hőmérsékletű (homogén) vízjégből van (jégcsap)! A henger a Nemzetközi Űrállomáson lebeg a levegőben, nem ér hozzá semmihez a levegőn kívül. Nem éri hőszugárzás; csak a vele érintkező levegő melegíti, melynek hőmérséklete $+20^\circ\text{C}$, térfogata végtelen nagyra tekinthető, és nem mozog. Állapítsuk meg, hogy r és h milyen értékei esetén lesz a jégcsap olvadása során a két vége „hegyes”, és mikor kapunk „éles” peremű korongot – ha ezek a formák egyáltalán előfordulnak! Ennek megállapításához definiáljuk értelmesen, de megfelelően precízen a „hegyes” és „éles” kategóriákat! Milyen más kvalitatív formák alakulnak ki az olvadás során?

(Veres Gábor)

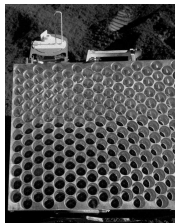
20. Hányszorosára nő a megvilágítás erőssége egy fehér felületen (a szemünkkel érzékelve), ha a halogén lámpa wolfram szála 2700 K helyett 3000 K -en izzik? Hányszorosára javul a hatásfok?

(Sánta Imre)

21. Vizsgáljuk meg egy negatív törésmutatójú lapos, d vastagságú anyagréteg képalkotását! Reális esetekre becsüljük meg a kromatikus aberráció mértékét! Hogyan csökkenthetnénk a rendszer kromatikus aberrációját korrekciós lencsék nélkül?

(Gombkötő Ákos)

22. Számos szovjet és amerikai Hold-program során vittek fényt visszaverő, retroreflektor egységeket a Holdra. Ezek közül a legnagyobbat (kb. $0,68 \text{ m}^2$) az Apolló-15 útja során helyezték el, közel merőlegesen a Föld irányára. A retroreflektor 300 db 38 mm átmérőjű egyedi sarokprizmából áll. A Földön 1 J energiájú, Q-kapcsolt (10 ns félértékszélességű), TEM_{00} módusú, 3 mm átmérőjű rubin lézernyalábot egy 3 m átmérőjű teleszkópba vezetve kitágítjuk és a nyaláb középpontját kellően pontosan a retroreflektorra irányítjuk. Mekkora lesz a visszavert nyaláb a Földön? Hány foton érkezik vissza ugyanannak a teleszkópnak a fókuszpontjába 2,5 s alatt a lézer fényéből, és milyen időbeli eloszlással?



(Sánta Imre)

23. Az elektron fajlagos töltésének meghatározására egy kisméretű katódsugárcsővet használunk. Az elektronokat az eltérítő elektródák előtt gyorsítjuk, az elektródák átlagpotenciálja azonos az utolsó gyorsító anód potenciáljával. A gyorsítófeszültség $U_a = 1,15 \text{ kV}$. Az elektronok a gyorsító térből egy nagyon kis lyukon lépnek ki, de még nem fókuszáltak, az ernyőn centiméternyi foltot hagynának. A felgyorsított elektronokat a katódsugárcsővel azonos tengelyű, áramjárta tekercs hosszanti mágneses térével fókuszáljuk. Az eltérítő lemezek hossza $x_1 = 23,45 \text{ mm}$, az utolsó anód és az ernyő közötti távolság pedig $x_2 = 234 \text{ mm}$. A tankönyvek hibásan kondenzátornak nevezik az eltérítő lemezeket, párhuzamosaknak rajzolják őket, pedig elvileg nem is lehetnek párhuzamosak, de kondenzátorok mégannyira sem! A tekercs további fontosabb konstrukciós adatai: $L = 450 \text{ mm}$, átmérője $D = 49,5 \text{ mm}$, a huzal átmérője (a szigeteléssel együtt) $d = 0,35 \text{ mm}$. A meneteket szorosan egymás mellé tekercselték. Feltételezzük, hogy a katódsugárcsőben nincsenek ferromágneses alkatrészek. Az e/m érték meghatározása csak akkor lehetséges, ha az elektronokat fókuszálni tudjuk a képernyőre, ugyanis csak ekkor következtethetünk a szanaszét induló elektronok pályáira. A meghatározáskor a tekercsen átfolyó áram erősségét $I = 0$ -tól kiindulva egyenletesen növeljük. A készülék megépítésének tervezésekor az elektron fajlagos töltését ismertnek tekintjük. Számítsuk ki az elektron sebességét a képernyőbe való becsapódás előtt! Határozzuk meg a mágneses indukciónak azt a minimális B_{\min} értékét és az azt létrehozó I_{\min} áramerősséget, amelynél először kapunk fókuszált elektronnyalábot az ernyőn!

Segítség: A mostani őszi egyik napos délutánján elmentünk egy krigli sörre egyik fizikus kollégával. Szerettük volna megbeszélni ezt az Ortway-versenyre ajánlott feladatot. Elindultunk. Megnéztem az órát, 17:01:02-kor léptünk ki az iskolából, én az egyenes úton sétálva mentem, neki valamilyen elintéznivalója volt, így különböző utakon, de egyszerre érkeztünk a Körös jobb partján levő sörözőbe, pontosan 17:18:19-kor. Rájöttünk, hogy a feladat sokkal egyszerűbb, mint gondoltuk, ezért inkább a kísérletes fizikatanítás lehetőségeiről beszélgettünk.

(Bartos-Elekes István)

24. Tekintsünk két radioaktív atomot, melyek közül az egyik $[t, t + dt]$ és a másik $[s, s + ds]$ időintervallumban

$$N \exp(-as - bt - c\sqrt{st}) ds dt, \quad a, b > 0, \quad c \in \mathbb{R}$$

valószínűséggel bomlik. Határozzuk meg analitikusan felírt alakban a valószínűségi sűrűségfüggvényhez tartozó N normálási faktort, ha az csak az első síknegyedben van értelmezve! Ábrázoljuk általunk választott paraméterek mellett annak valószínűségét $T \in [0, 100]$ időintervallumban, hogy mindkét atom elbomlik T idő alatt! Határozzuk meg általunk választott paraméterek mellett numerikusan annak közelítő valószínűségét, hogy az egyik atom előbb bomlik el, mint a másik! Adjuk meg analitikusan felírt alakban annak várható értékét és szórását, hogy mennyi idő alatt bomlik el az egyik, illetve a másik atom!

(Csirik Mihály, Homa Gábor, Lisztes László)

25. A (klasszikus és a relativisztikus) elektrodinamikában a pontszerű részecskék és az elektromágneses mező csatolását egy skaláris csatolási állandó, az elektromos töltés segítségével írjuk le. Vizsgáljuk meg ehelyett azt az esetet, amikor a csatolást egy antiszimmetrikus μ_{kl} négyestenzort alkotó csatolási állandók valósítják meg! Írjuk fel a részecske és a vákuumbeli elektromágneses mező teljes hatásintegrálját a csatolási tenzor felhasználásával felírt új tagokkal kiegészítve! (Ha a csatolási tenzor komponenseit önálló dinamikai szabadsági fokoknak tekintjük, a hatásintegrált kiegészíthetjük e mennyiség saját dinamikáját leíró taggal is, melynek kovariáns Lagrange-függvénye $\dot{\mu}_{kl} \dot{\mu}^{kl}/2$ alakú, ahol a pont a sajátidő szerinti deriváltat jelöli.) Vezessük le a részecske mozgásegyenletét, valamint a μ_{kl} négyestenzor dinamikájára vonatkozó egyenletek és a Maxwell-egyenletek új alakját! Írjuk át a kovariáns egyenleteket hármass jelölésmódba! (*Javaslat:* a antiszimmetrikus μ_{kl} négyestenzort két háromdimenziós vektorral, \mathbf{p} -vel és \mathbf{m} -vel jellemezhetjük.) Keressünk megmaradási tételeket a rendszer szimmetriái alapján!

(Dávid Gyula)

26. Tegyük fel, hogy ismerjük a „kozmológiai elvet”, és ennek tudatában keressük az egész teret kitöltő, táguló anyag sebességmezőjét!

Nemrelativisztikus esetben az (általánosított, elliptikus) Hubble-típusú önhasonló sebességmezőnek $(v_x(\mathbf{r}, t) = H_x(t)r_x, v_y(\mathbf{r}, t) = H_y(t)r_y, v_z(\mathbf{r}, t) = H_z(t)r_z)$, ahol $H_k(t)$ tetszőleges időfüggvények) megvan az a kellemes tulajdonsága, hogy teljesíti a kozmológiai elvet: *minden* t időre és \mathbf{r} helyvektorra igaz, hogy ha az adott t időpillanatban egy megfigyelő átül egy adott \mathbf{r} pontba, és a sebességmező ottani értékével, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ -vel mozog, akkor (a Galilei-transzformáció képletei szerint) pillanatnyilag éppen olyan sebességmezőjű tágulást lát maga körül, mint amelyet az origóban ülő megfigyelő.

Keressük meg a legáltalánosabb olyan $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ sebességmező-kifejezést, amely ezt a tulajdonságot a speciális relativisztikus kinematika, azaz a Lorentz-transzformáció esetére általánosítja! Ilyenkor van némi szabadságunk abban, hogy az origóban melyik időpillanatra követeljük meg, hogy ugyanolyan legyen a sebességmező, mint amit a tágulással együtt mozgó megfigyelő lát. Próbálkozhatunk három lehetőséggel is: a két időpillanat legyen egyidejű 1) a nyugvó rendszerben, 2) a mozgó megfigyelő rendszerében, vagy 3) igazságosan: abban a rendszerben, amelyhez képest az origó és a mozgó megfigyelő egyforma sebességgel távolodik. (Megelégedhetünk a gömbszimmetrikus eset, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{r} \cdot f(|\mathbf{r}|, t)$ tanulmányozásával, valamint feltehetjük, hogy az origóban $\mathbf{v}=0$.)

(Nagy Márton)

27. A Föld körül különböző sugarú körpályákon műholdak keringenek. Az egyszerűség kedvéért most csak az Egyenlítő síkjában keringő szatellitokkal foglalkozunk. A műholdak fedézetén pontos időmérő berendezéseket helyezünk el. Ezek érzékenysége lehetővé teszi, hogy a speciális relativitáselméletből adódó idődilatációs effektusokat, valamint az általános relativitáselméletből adódó gravitációs vöröseltolódás időtorzító hatását is kimérhessék. Van-e a különböző sugarú egyenlítői körpályákon keringő műholdak között olyan, amelynek sajátidejét mérő órája pontosan szinkronban jár a műhold alatt a Föld felszínén (az Egyenlítőn) tartózkodó megfigyelők órájával? Ha van ilyen, milyen magasan kering ez a műhold? (Fejezzük ki pályája sugarát a Föld sugarának többszöröseként, és adjuk meg km-ben is!) Mekkora számszerű különbséget okoz az eredményben a Föld forgásának elhanyagolása, illetve figyelembe vétele? A számítások során a Földet pontosan gömb alakúnak tekinthetjük.

(Dávid Gyula)

28. Nemrelativisztikus pontszerű töltés mozog időfüggetlen külső mágneses mezőben, mely z -irányban eltolásinvariáns. A részecske $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \equiv \vec{r} = \vec{r} \cdot$ helyoperátorához kanonikusan konjugált impulzus operátorának reprezentációja legyen $\vec{p} = -i\vec{\nabla} + q\vec{A}$, ahol \vec{A} a vektorpotenciál, q pedig a részecske töltése ($\hbar = c = 1$). Milyen feltételek mellett ábrázolódnak a fenti operátorokkal a kanonikus kommutációs relációk? Mutassuk meg, hogy a várakozásokkal ellentétben ezen feltételek mellett is létezik egy olyan egyszerű, nemtriviális rendszer, melyben a fenti ábrázolás nem schrödingeri, azaz nem létezik olyan \hat{U} unitér operátor, melyre $\hat{U}^\dagger \vec{p} \hat{U} = -i\vec{\nabla}$!

(Fejős Gergely)

29. Vizsgáljuk egy homogén $\vec{B} = (0, 0, B_0)$ mágneses térbe helyezett lokalizált elektron spinjét! A spint leíró Hamilton-operátor $\hat{H} = -\frac{1}{2}g\mu_B\vec{B} \cdot \vec{\sigma}$, ahol $g = 2$, μ_B a Bohr-magneton, $\vec{\sigma}$ pedig a spint reprezentáló három Pauli-mátrix vektora. Kezdetben a spin alapállapotban van, azaz a $\vec{p} = \langle \psi | \vec{\sigma} | \psi \rangle$ polarizációvektor a z irányba mutat. Próbáljuk meg megforgatni a spint úgy, hogy a mágneses tér vektorát egyenletes szögsebességgel egyszer körbeforgatjuk az xz síkban: $\vec{B}(t) = B_0 (\sin(2\pi ft), 0, \cos(2\pi ft))$! A mágneses tér körbeforgatása után, azaz a $t = 1/f$ időpontban, megmérjük a spin z komponensét. Mi a valószínűsége, hogy +1-et mérünk, $P_+(B_0, f) = ?$ Próbáljuk számolás nélkül megsejteni az eredményt az $f \rightarrow 0$ és az $f \rightarrow \infty$ határesetekben! Ábrázoljuk a $P_+(f)$ függvényt a $B_0 = 1$ Tesla esetben, az $f \in [0; 100 \text{ GHz}]$ intervallumon! Ábrázoljuk a polarizációvektor trajektóriáját az $f \in \{0,1; 1,0; 10,0; 100,0\}$ GHz esetekben!

(Pályi András)

30. Egy két $s = 1/2$ spinű objektumból álló összetett kvantummechanikai rendszer \hat{H}_0 Hamilton-operátora a $t < 0$ intervallumban nem függ a spinváltozótól. A $t = 0$ időpillanatban azonban valamely pillanatszerű külső változás hatására hozzáadódik egy

$$\hat{H}' = \frac{4\Delta}{\hbar^2}(\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2)$$

alakú spinfüggő tag, amely a továbbiakban (a $t > 0$ intervallumban) változatlan marad.

Tegyük fel, hogy a vizsgált rendszer $t \leq 0$ esetén a

$$|+-\rangle = \frac{|1, 0\rangle + |0, 0\rangle}{\sqrt{2}}$$

állapotban van!

A \hat{H}' kölcsönhatást perturbációnak tekintve határozzuk meg első rendben annak valószínűségét, hogy a rendszer időfejlődése során végül a $|++\rangle$, $|+-\rangle$ vagy a $|--\rangle$ állapotok valamelyikébe jut!

Ha a kapott eredmény nem meggyőző (*Tipp*: lehet, hogy nem az...), végezzünk pontosabb számítást, majd ennek tükrében magyarázzuk meg az egyszerű naiv közelítés hiányosságainak okait!

(Magyar Péter)

31. Tekintsük a következő $S = 2$ spin-hullámfüggvényt:

$$|\psi\rangle = \frac{|2\rangle - |\bar{2}\rangle}{\sqrt{2}},$$

ahol a $|2\rangle$ és $|\bar{2}\rangle$ az S^z spin-operátor $+2$ és -2 sajátértékű sajátállapotai!

a) Mik a $\mathbf{S} = (S^x, S^y, S^z)$ spin-operátorok várható értékei? Mutassuk meg, hogy a $|\psi\rangle$ állapot időtükrözésre invariáns!

b) Milyen $SO(3)$ forgatások transzformálják a $|\psi\rangle$ állapotot saját magára (egy fázis erejéig)? Mutassuk meg, hogy ezek a forgatások a D_4 diéder-csoporttal izomorf csoportot alkotnak! Mekkora Berry-fázist szednek össze a hullámfüggvények a forgatások során? Segítségül keressük meg azokat az $\hat{\mathbf{n}} = (n_x, n_y, n_z)$ irányokat ($\hat{\mathbf{n}}$ egységvektor), amelyekre $\langle \hat{\mathbf{n}} | \psi \rangle = 0$, ahol az $|\hat{\mathbf{n}}\rangle$ spin-koherens állapot definíciója: $(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S})|\hat{\mathbf{n}}\rangle = 2|\hat{\mathbf{n}}\rangle$.

c) Mi a tetszőlegesen elforgatott $|\psi\rangle$ hullámfüggvények paramétertere? Hogy viszonyul a Berry-fázis a paraméterter fundamentális (első homotópia-) csoportjához?

(Penc Karlo)

32. Tekintsünk egy olyan kvantummechanikai rendszert, amelynek Hamilton-operátora két ($E_+ = \hbar\omega$ és $E_- = -\hbar\omega$) sajátértékkel és a hozzájuk tartozó (normált) $|+\rangle$ és $|-\rangle$ sajátállapotokkal rendelkezik. Tegyük fel, hogy a rendszert a $t = 0$ időpontban a

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{2}|+\rangle + \sqrt{\frac{3}{4}}|-\rangle$$

állapotban preparáltuk!

Tekintsünk még egy, a fenti rendszerhez tartozó valamely \hat{A} megfigyelhető mennyiséget, amelynek két sajátértéke a és b , a hozzájuk tartozó sajátállapotok pedig

$$|a\rangle = \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |b\rangle = \frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Vizsgáljuk meg az alábbi két esetet:

a) A rendszer $t = 0$ -tól valamely tetszőleges $t = 2T$ -ig magára hagyva fejlődik az időben. Ekkor a rendszeren egy fizikus megméri az \hat{A} mennyiséget. Milyen valószínűséggel kapja a mérés kimeneteleként az a értéket?

b) A következő, megerősítő kísérletben a rendszer annak rendje s módja szerint először egy ideig ismét csak fejlődik magára hagyva az időben. Azonban a mérést végző fizikus $t = T$ -kor egy váratlan mobilhívást kap, és ijedtében véletlenül megnyomja az \hat{A} -t mérő Enter gombot. Se idő, se lehetőség az egész mérés újrakezdésére. A fizikus jobb híján úgy dönt, hogy NEM olvassa le a kapott értéket, remélve, hogy így nem következik be a hullámfüggvény összeomlása, ezért az elkövetett hiba nem befolyásolt semmit. Ezután hagyja a rendszert tovább fejlődni $t = 2T$ -ig, amikor ismét megméri \hat{A} -t, és megkönnyebbülve kiszámítja az a sajátérték észlelésének valószínűségét.

Hasonlítsuk össze a két esetet, és döntsük el: Vajon helyrehozta-e a mérés során elkövetett hibáját eme képzelt kollégánk?

(Magyar Péter)

33. Jól ismert probléma a kvantummechanikában, hogy sem az impulzus-sajátállapotok, sem a helyzet-sajátállapotok nem elemei a Hilbert-térnek, ezért bázisként való alkalmazásuk nem triviális. Az energia-sajátállapotok ugyan teljes bázist alkotnak, ám az előzőekkel ellentétben nem „a priori adottak”, meghatározásuk sokszor nem egyszerű.

Bizonyos szempontból kielégítőbb lehet, ha egy „gyakorlatilag eleve adott”, Hilbert-térbeli bázist használunk. Ilyen pedig van, például a koherens-állapotokra vonatkozóan.

Válasszuk ki koherens állapotok egy teljes, minimális rendszerét!

Vizsgáljuk meg a harmonikus oszcillátort ilyen koherens bázisban! Fejtsük ki a szám- (egyben energia-) sajátállapotokat, majd ellenőrizzük az eredményt numerikusan is!

(Gombkötő Ákos)

34. Egy háromkomponensű hullámfüggvénnyel leírható kvantumrészecske Hamilton-operátora

$$\hat{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\hat{I} + \frac{\hbar\omega}{\mathbf{p}^2}\mathbf{p} \circ \mathbf{p},$$

ahol m és ω pozitív paraméterek, \hat{I} a 3×3 -as egységmátrix, \mathbf{p} a részecske impulzusoperátora, a \circ jel pedig a diadikus szorzást jelöli.

Számítsuk ki Heisenberg-képben a részecske $\mathbf{x}(t)$ helyoperátorát az idő függvényeként! Határozzuk meg egy adott (pl. Gauss-görbe alakú) kezdőállapot esetén a helyoperátor várható értékét az idő függvényében! Értelmezzük az eredményeket!

(Dávid Gyula)

35. A „Szurikáta” mélyűri űrbázis N űrállomásból áll, melyek egy szabályos N -sokszög sarkain, egymáshoz képest mozdulatlanul helyezkednek el. Az űrállomásokon dolgozó kutatók – mint a szurikáták a természetben – állandóan figyelik a környezetüket, minél több adatot igyekeznek begyűjteni. Többek közt folyamatosan megfigyelik a sokszög közepén nyugalomban lévő hidrogénatom színeképét is. Egy napon a hirtelen jött „ kozmikus vihar” mindegyik űrállomást egyforma Q töltésre tölti fel. Legalábbis erre következtetnek a kutatók, miután azt tapasztalják, hogy a megfigyelt központi hidrogénatom megszokott színeképvonalai részben eltolódtak, másrészt újabbak jelentek meg, mintha az ismert vonalak felhasadtak volna. Kövessük a tudósok gondolatmenetét! Határozzuk meg $N = 42$ sokszögre a hidrogénatom p, d, f pályáihoz tartozó színeképvonalak felhasadását! Ki lehet-e számítani ezek alapján a Q töltés nagyságát? Hogyan függ a színeképvonalak helye az N értékétől? Miért különleges az $N = 4$ eset? Tanulmányozzuk azt az esetet, amikor $N \rightarrow \infty$ és közben az NQ szorzat állandó! A számítások során feltételezhetjük, hogy a hidrogénatom elegendően messze van az űrállomásoktól.

Számítsuk ki, hogy 100 km átmérőjű űrbázis esetén mekkora Q töltés okoz a hiperfinom felhasadással vagy a Lamb-effektussal összemérhető hatást! Hogyan tolódnak el a színeképvonalak, ha a Q töltésű űrállomások lassan együtt forognak a sokszög közepén átmenő, a síkjára merőleges tengely körül?

(Cserti József)

36. Extrém rövid fényimpulzusok előállítása az ú.n. magas felharmonikus keltés segítségével történik. Sokáig kizárólag klasszikus/szemiklasszikus modelleken belül sikerült modellezni a folyamat végeredményét. A folyamat sok fontos tulajdonságát azonban csak egy megfelelőbb kvantumos modellen keresztül lehet igazán megragadni.

Tekintsük a lehető legegyszerűbb modellt, amelyiktől realiztikusan elvárható, hogy visszaadja a magas felharmonikus keltés sajátosságait! Vegyünk egy kétszintes rendszert, amely lineárisan csatolódik végtelen sok elektromágneses módushoz, és amelyik egy rövid, erős, klasszikusnak vehető lézertimpulzussal hat kölcsön!

A modell felállításakor, és bizonyos további megfontolásokhoz hivatkozni lehet az alábbi cikkekre: (<https://arxiv.org/abs/1605.01087>)

Adjunk analitikus becslést a fotonszámok várható értékének időfüggésére! A megoldás vonatkozhat általános gerjesztő impulzusra, vagy azok speciális formájára is. A kezdeti feltételeket tetszőlegesen rögzíthetjük.

(Gombkötő Ákos)

37. Tekintsük négy tömegpontnak a következő módon hierarchikus rendszerét: két csillagtömegű ($m_1 = m_2 = 10M_\odot$) és két szupermasszív fekete lyukat ($m_3 = m_4 = 10^{10}M_\odot$), ahol m_1 and m_2 egy a_{in} -sugarú körpályán kering a közös tömegközéppontja körül, a tömegközéppontjuk pedig egy a_{out} -sugarú körpályán kering a szupermasszív feketelyuk-kettős körül, ahol $a_{out} \gg a_{in}$. Nevezzük a két körpályát belső és külső orbitnak. A szupermasszív kettős szeparációja R , ahol $R \ll a_{out}$.

a) Adjunk nagyságrendi becslést arra, hogy mekkora lehet a belső és külső orbitok sugarainak a_{in}/a_{out} aránya ahhoz, hogy ez a konfiguráció stabil legyen a szupermasszív feketelyuk-kettős árapályerejével szemben!

b) Tegyük fel, hogy a szupermasszív feketelyuk-kettős hirtelen összeolvad, és tömegének $\varepsilon = 10\%$ -át kibocsájtja gravitációs hullámok formájában! Hogyan változik a belső és külső orbit fél nagytengelye és excentricitása?

c) Szét tudják-e szakítani a gravitációs hullámok az eredetileg stabil belső vagy külső orbitot az ε és a_{in}/a_{out} paraméterek tetszőleges értéke esetén? Ha igen, milyen paraméterek esetén repül szét a belső vagy a külső orbit?

Használjunk klasszikus nem-relativisztikus fizikát a számításokhoz, tehát az a_{in} és a_{out} legyenek sokkal nagyobbak, mint a fekete lyukak horizontjai!

(Kocsis Bence)

38. A LIGO és a VIRGO gravitációshullám-felfedezéseivel egy új ablak nyílt az Univerzumra. Minden eddig felfedezett forrás esetén a gravitációs hullám frekvenciája és amplitúdója időben nőtt, amíg a gravitációs hullámokat kibocsájtó kettős össze nem ütközött. Körpályás esetben a dimenziótlan gravitációs hullám amplitúdó körülbelül így adható meg: $h = (32/5)^{1/2} G^2 M \mu / (c^4 r D)$, ahol $M = m_1 + m_2$ és $\mu = m_1 m_2 / M$ az össz- és redukált tömegek, r , és D a keringési sugár és a forrástól vett távolság, a gravitációs hullám frekvenciája pedig a keringési frekvencia kétszerese. A vezető rendű közelítésben az ütköző kettős kepleri excentrikus pályán mozog, aminek a fél nagytengelye és excentritása lassan változik a gravitációs hullám emisszió miatt:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{64}{5} \frac{G^2 \mu M^2}{c^5 a^3} F(e),$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{304}{15} e \frac{G^2 \mu M^2}{c^5 a^4} H(e),$$

ahol $F(e) = [1 + (73/24)e^2 + (37/96)e^4]/(1 - e^2)^{7/2}$ és $H(e) = [1 + (121/304)e^2]/(1 - e^2)^{5/2}$. A kepleri keringési frekvencia és a gravitációs hullám frekvenciája tehát izolált kettősök esetén időben nő.

A LIGO és a VIRGO váratlan asztrofizikai forrásokból is keres gravitációs hullámokat. Lehetséges-e, hogy egy tömegpontokból álló rendszer által kisugárzott gravitációs hullámok frekvenciája a korábbi forrásokkal ellentétben *csökken* az idő függvényében? Egy ilyen konfigurációban hogyan függnek az időtől a rendszer pályaelemei?

Végezzünk egyszerű vezető rendű számításokat newtoni nem-relativisztikus fizikával, ahol lehet!

(Kocsis Bence)

39. 45 éve halt meg Mauritz Cornelis Escher, akinek képeit képeit sok tudós kedveli. Vizsgáljuk meg a Circle limit IV képe (<http://www.mcescher.com/gallery/recognition-success/circle-limit-iv/>) szerinti elrendezésű Ising-modell viselkedését ferromágneses és anti-ferromágneses csatolással, és hasonlítsuk össze a sima 2D négyzetrács modellel! Vizsgáljuk meg, van-e fázisátalakulás, ha igen milyen hőmérsékleten, illetve elemezzük a végesméret-effektus hatását!

(Csabai István)

40. Pirx pilóta járőrhajójával egy vibránium-felhő peremvidékén kering, ahol a ritka gázban még a súrlódás is elhanyagolható. Mint tudjuk, a vibránium feltétlenül szükséges a fénynél gyorsabb közlekedést lehetővé tevő warp-hajómű kifejlesztéséhez. Mindazonáltal az Ismert Ūrben nagyon kis mennyiségben fordul elő – nem csoda, ha az intelligens űrhajózó civilizációk kiélezett verseny folytatnak a ritka vibránium-források megszerzéséért.

És most itt ez az új lelőhely – egy egész bolygónyi (nagyjából a Föld tömegével megegyező mennyiségű) tiszta vibránium-gázfelhő, amely az első mérések szerint gömbszimmetrikusan oszlik el, sűrűsége a középponti atommagsűrűségtől radiális irányban exponenciálisan csökken. Ebben a gázformában a vibránium teljesen ártalmatlan, semmiféle spontán tértorzító hatása nincs (ez a képessége csak a vulkániak által kifejlesztett warp-hajtóműben nyilvánul meg, ha pantagonittal kerül kémiai reakcióba). Pirx tehát egy látszólag közönséges gázfelhő külső rétegében kezd körözni, arra ügyelve, nehogy valamelyik konkurens (vagy baráti – olyan nehéz őket megkülönböztetni!) civilizáció rátegye a kezét a lelőhelyre.

És íme – alig tett meg egy félkört a felhő középpontja körül, máris azt látja, hogy a felhő túlsó oldalán, vele pontosan szemben egy másik űrhajó érkezik a végtelenből, fékez, majd pontosan az övével megegyező sugarú körpályára áll. Pirx minden műszerét az idegen hajóra irányítja (természetesen csak passzív megfigyelésekre hagyatkozik, aktív eszközök, pl. radar használata elárulná az ő hajójának jelenlétét és koordinátáit). A vibránium-gáz a látható fény számára eléggé átlátszó, a vonatkozó Smith–Kovács–Kuznyecov-elmélet szerint törésmutatója csak a gáz sűrűségétől függ. Pirx fejlett műszerei még a sűrű középponti tartományon is átlátanak. A képernyőn kirajzolódó idegen hajó meglehetősen hasonlít Pirx saját járőrhajójára, a farrészen még a Bolygók Egyesült Föderációjának felségjele is felismerhető. Az a gyanús, ami nem gyanús!

– tanulta valaha Pirx az Űrakadémián. Hát igen, a soros ellenség föderációs hajónak álcázza kémhajóit... Nézzük meg közelebbről! – gondolja Pirx, és hajóját a felhő mélyebb rétegeibe vezeti, gondolván, ott gyorsabb keringéssel közelebb kerülhet az idegenhez. Igen ám, de alig fél keringés után azt veszi észre, hogy az idegen hajó is mélyebbre merül a vibránium-felhőbe, majd pontosan ugyanakkora sugarú körpályára áll, mint Pirx hajója, pontosan vele átellenes pozícióban. Nem enged közelebb magához – gondolja Pirx. De nem hagyom! – és újabb manőverbe kezd.

Igen, jól sejtettétek. A fenti forgatókönyv még negyvenegyszer megismétlődik. Valahányszor Pirx új, más sugarú körpályára tér át, az idegen hajó félfordulat múlva követi, és ugyanolyan sugarú körpályára áll, mint Pirx, vele pontosan szemközti helyzetben.

A negyvenkettedik sikertelen próbálkozás után (ennyit ír elő a Galaxis Útikalauz és a Szolgálati Szabályzat) Pirx feladja a kilátástalan űrmacska–űregér harcot, és elhagyja a vibránium-felhőt. Fél fordulattal később ugyanezt teszi az idegen hajó is. Pirx az anyahajón jelentést tesz parancsnokának – az azonban bolondnak nézi, hiszen a flotta érzékeny műszerei sok fényéves körzetben nem jeleztek azonosítatlan űrtevékenységet.

Egyelőre a jövő titka, hogy melyik civilizáció fogja kiaknázni az új vibránium-lelőhelyet, amint az is, hogy mi lesz a habókosnak nyilvánított Pirx további karrierjével. Tudományos szempontból bennünket egyetlen kérdés érdekel: pontosan milyen formula szerint függ a vibránium-gáz törésmutatója a gáz sűrűségétől?

(Dávid Gyula)

`\end{document}`